Rovnice, nerovnice

2. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

Pro každou dvojici reálných čísel x a y platí takzvaná trojúhelníková nerovnost:

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

popřípadě pro každou dvojici a, b platí

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|.$$

Příklady:

1. Řešte v $\mathbb{R}$ následující nerovnosti:
   a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$
   b) $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$
   c) $x^2 + 1 - |x + 2| > 0$
   d) $\log_2(x^2 + |x + 6| - 1) > 0$
   e) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$
2. Najděte všechna reálná řešení rovnice $\log_3^2 x + \log_3(9^3) = \log_3 x^5$.
3. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ najděte všechna reálná čísla x, která splňují:
   a) $a(a - 1)x < 2^{57\,885\,161} - 1$
   b) $x^2 + ax < 0$
   c) $x + a = 2ax + 1$
   d) $\frac{a}{x} - \frac{4}{ax} = 1 - \frac{2}{a}$
   e) $x^2 - 2(a + 4)x + a^2 + 6a = 0$
   f) $x^2 + 4x + 6 \leq |x^2 + 4|$
4. Řešte nerovnici $1 \leq |ax + 1| < 2$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.
5. Určete množinu $\big\{a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\colon (|x - 2| \leq 1) \Rightarrow (x^2 - ax > 5)\big\}$.
6. V závislosti na parametru c najděte všechna reálná x, která splňují, že

$$\log|x| + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Načrtněte grafy funkcí:

   a) $\Big|\Big|\big||x|-1\big|-1\Big|-1\Big|$
   b) $\left|\frac{3x+3}{2x-4}\right|$
   c) $|\tan(-\pi x)|$
   d) $|\sin(2-x)-1|$
   e) $|\log|x-1||$

∗ 8. Zjednodušte pro $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2^{n+3}}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}}$$

∗ 9. Pro $n \in \mathbb{N}$ je definován výraz $V(n) = \log 2^n - \log 2^{n-1} + \log 2^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\log 2$.

   a) Vyjádřete jediným členem $V(3)$.
   b) Vypočtěte podíl $\frac{V(5)}{V(4)}$.
   c) Vypočtěte rozdíl $V(100) - V(99)$.

α. Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$\log_7^2(y^2+2y+1) + \log_7\left((y+1)^{48}\right) = \log_7(49^{26})$$

β. Načrtněte grafy funkcí:

   a) $\frac{7x-13}{x-2}$
   b) $\left|\frac{4x+67}{x+17}\right|$
   c) $\frac{3x^2+x-4}{x^2-1}$
   d) $\frac{\pi x-\pi\varphi+1}{x-\varphi}$, kde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.6180339887$.